



TITLE:

Hyperbolic imitations if 3-manifolds with finite group actions

AUTHOR(S):

河内, 明夫

CITATION:

河内, 明夫. Hyperbolic imitations if 3-manifolds with finite group actions. 数理解析研究所講究録 1987, 633: 57-63

ISSUE DATE:

1987-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100064>

RIGHT:

Hyperbolic imitations of 3-manifolds with finite group actions

大阪市大理 河内明夫 (Akio Kawauchi)

3次元コンパクト有向連結多様体を M で表す. M 内の各球面成分を 3-球体で埋めて, M からできたものを \hat{M} と表す. L によって空集合かまたは M 内の有限グラフとする. 各 $d \geq 0$ に対して, L の次数 d の頂点からなる集合を $\nu_d(L)$ と表す. $\nu_0(L) = \emptyset$, $L \cap M \subset \nu_1(L)$ と仮定しておく. この報告では, [Ka1], [Ka2] において得られた 3次元多様体に関する imitation の結果の, 有限群作用を持つ場合への拡張について論ずる.

ある有限群 G が M に (なめらかかつ faithful かつ向きを保存して) 作用しているとし, また L は G -不変であるとする.

$I = [-1, 1]$ とおく. $(x, t) \in M \times I$ に対し, $g(x, t) = (gx, t)$, $g \in G$, とおくことにより, G を $(M, L) \times I$ 上の変換群とみなす.

$\alpha(x, 1) = (x, -1)$, $x \in M$, かつ $\text{Fix}(\alpha, M \times I)$ が 3次元多様体となるような $(M, L) \times I$ 上のなめらか G -involution α を

$(M, L) \times I$ の G -reflection といふ. また, $(\text{Fix}(\alpha, M \times I), \text{Fix}(\alpha, L \times I))$ を

(α による) $(M, L) \times I$ の G -reflector といふ。明らかに, G は $(\text{Fix}(\alpha, M \times I), \text{Fix}(\alpha, L \times I))$ に作用してゐる。ある定められた G -embedding $\phi: (M^*, L^*) \rightarrow (M, L) \times I$ によつて, $\phi(M^*, L^*)$ が (α による) $(M, L) \times I$ の G -reflector となるならば, ϕ を G -reflector imbedding と呼ぶことにする。

定義 ある G -reflector imbedding $\phi: (M^*, L^*) \rightarrow (M, L) \times I$ と射影 $r: (M, L) \times I \rightarrow (M, L)$ の合成 $g = r\phi: (M^*, L^*) \rightarrow (M, L)$ を G -imitation といふ。2つの G -reflector imbeddings $\phi, \phi': (M^*, L^*) \rightarrow (M, L) \times I$ が G -isotopic ならば, G -imitations $g = r\phi, g' = r\phi': (M^*, L^*) \rightarrow (M, L)$ は G -合同 であるといふ。

任意の G -imitation $g: (M^*, L^*) \rightarrow (M, L)$ は G -写像であり, しかも G -imitation $(M^*, L^* \cup \text{Fix}(G, M^*)) \rightarrow (M, L \cup \text{Fix}(G, M))$ を定義してゐる。さらに, $g'|L^*: L^* \cong L$, $g'|\partial M^*: \partial M^* \cong \partial M$, かつ $g'|\text{Fix}(G, M^*): \text{Fix}(G, M^*) \cong \text{Fix}(G, M)$ となるような G -imitation $g': (M^*, L^*) \rightarrow (M, L)$ は G -合同になる。このような G -imitation g' は normal であるといふ。

$L = L^* = \emptyset$ の場合の結果を述べると次のようになる:

定理 I 任意の $K > 0$ と M に対し, normal G -imitation

$g: M^* \rightarrow M$ で 次を満たすものが存在する:

(1) \hat{M}^* は (non-torus 境界成分が totally geodesic であるような有限体積の) 双曲多様体,

(2) $\text{Vol}(\hat{M}^*) > K$,

(3) $\text{Isom}(\hat{M}^*) \cong G$.

(注意) M^* の G -作用は \hat{M}^* の G -作用に拡張できるから,

(1) も満たすだけで, 単射準同型 $G \rightarrow \text{Isom}(\hat{M}^*)$ が存在

することは Mostow Rigidity からわかる. もし Thurston の

orbifold uniformization theorem [T] (この証明は現在

未発表) を仮定するならば, 上の (1), (2), (3) に加えて 次の

(4) をもつような normal G -imitation $g: M^* \rightarrow M$ が存在する:

(4) 有限群 G^* が \hat{M}^* に作用するならば, G^* は $\text{Diff} \hat{M}^*$

において $\text{Isom}(\hat{M}^*)$ の部分群に共役である.

系 G を位数 m の群で, 位数 m_1, m_2, \dots, m_r の元 $x_1,$

x_2, \dots, x_r で生成されていると仮定する. 任意の $K > 0$ に対し, 自由

G -作用をもつ 3次元 有向連結 閉 多様体 M^* で, 次のみ

たすものが存在する:

- (1) M^* は双曲多様体,
- (2) $H_1(M^*; \mathbb{Z})$ は $\text{rank } 1 + n(r-1) - \sum_{i=1}^r (n/m_i)$ の自由 Γ - \mathbb{N} - \mathbb{N} 群で $\text{Vol}(M^*) > K$,
- (3) $\text{Isom}(M^*) \cong \Gamma$.

条件(2)を除けば、これは Kojima [K0] によって得られた事実である。 $\Gamma = \{1\}$ である Γ -imitation は単に imitation と呼ばれる (cf. [K₀, I], [K₀, II]).

系 任意の $K > 0$ と 3次元コンパクト有向連結多様体 M に対し、 M^* は双曲多様体で $\text{Vol}(M^*) > K$ かつ M^* は有限群作用を持たないような imitation $g: M^* \rightarrow M$ が存在する。

この結果は [K/K/S] の主結果の hyperbolic version である。

定義 M 内の Γ -不変グラフ L に対し、 $v_0(L) = \emptyset$, $v_1(L) = L \cap \partial M$ かつ、 ∂M 内の任意の球面 S に対し $|v_1(L) \cap S| \geq 2$, かつ $L - \text{Fix}(\Gamma, M) \neq \emptyset$ となるならば、 L は M で good であるという。

$\mathcal{Q}_L(L - \text{Fix}(G, M))$ 内の $|G|$ 成分の open arcs からなる G -不変な family を G -open arc family といふ。

いま, $M^* = M$ とする G -imitation $g: (M, L^*) \rightarrow (M, L)$ を考えよう。

定義 $L \subset M$ が good であるような normal G -imitation $g: (M, L^*) \rightarrow (M, L)$ を考える。もし $g|_{\partial M} = \text{id}_{\partial M}$ ならば, g は ∂ -identical であるといふ。もし g が ∂ -identical で, しかも open G -arc families $a^* \in L^* - \text{Fix}(G, M), a \in L - \text{Fix}(G, M)$ に対して, $L^* - a^*$ と $L - a$ が M で ∂M を固定して G -ambient isotopic ならば, g は almost identical G -imitation であるといふ。

次が主結果である:

定理 II 任意の $K > 0$ と good G -graph $L \subset M$ に対して, G -exterior $E(L^*, M)$ が hyperbolic で $\text{Vol } E(L^*, M) > K$ となるような almost identical G -imitation $g: (M, L^*) \rightarrow (M, L)$ が存在する。

imitation の一般的性質を考えてみれば, この定理は [K₀], [K₁] の主定理の自然な一般化であることがわかるだろう。 $E(O^*, S^3)$ が hyperbolic で $\text{Isom } E(O^*, S^3) = \{1\}$ と

なるような imitation $g: (S^3, 0^*) \rightarrow (S^3, 0)$ (0 は trivial knot を表わす) が存在することに注意すると, 定理 II から 次の結果が出る:

定理 II* 任意の $K > 0$ と good G -graph $L \subset M$ に対して, $E(L^{**}, M)$ が hyperbolic で, $\text{Vol } E(L^{**}, M) > K$ かつ $\text{Isom}(E(L^{**}, M)) \cong G$ となるような 2-identical normal G -imitation $g: (M, L^{**}) \rightarrow (M, L)$ が存在する.

定理 I は 定理 II* から とう 遠くない.

参考文献

[Ka, 1] 河内, Hyperbolic imitations of 3-manifolds,
城崎シンポジウム「E-ユライ空間と3・4次元多様体」
報告集 (1987年2月), 32-50.

[Ka, 2] A. Kawauchi, Hyperbolic imitations of
3-manifolds, preprint.

[K/K/S] A. Kawauchi / T. Kobayashi / M. Sakuma, On
3-manifolds with no periodic maps, Japan. J. Math. 10
(1984), 185-193.

[Ko] S. Kojima, Isometry transformations of hyperbolic
3-manifolds, preprint.

[T] W. Thurston, Three-manifolds with symmetry,
preprint.